Informatique et aléatoire: convergence

Nicolas Gast

23 mars 2015

Définir $\lim_{n\to\infty} X_n$: pourquoi ?

- Modèles de performances (ex : réseau, calcul)
- Modèles de comportement (ex : réseaux sociaux)

- Algorithmes randomisés, algorithmique distribuée
- Algorithmique sur les grands graphes (e.g., codage)

Exemple : urnes de Polya (voir sujet popularité)

$X_1 = 1, \ Y_1 = 1.$

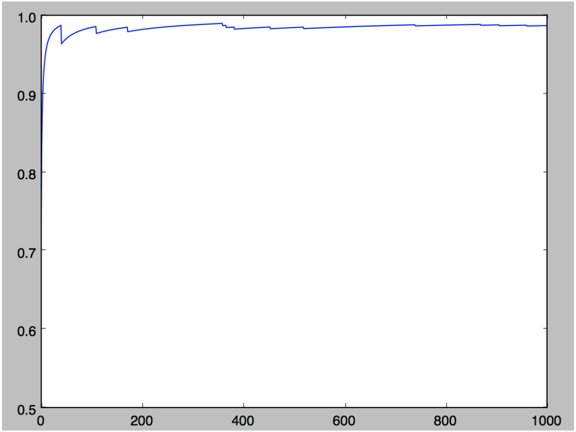
- Avec probabilité $X_n/(X_n + Y_n)$: $X_{n+1} = X_n + 1$
- Avec probabilité $Y_n/(X_n + Y_n)$: $Y_{n+1} = Y_n + 1$

Exemple : urnes de Polya (voir sujet popularité)

$X_1 = 1,\ Y_1 = 1.$

- Avec probabilité $X_n/(X_n + Y_n)$: $X_{n+1} = X_n + 1$
- Avec probabilité $Y_n/(X_n + Y_n)$: $Y_{n+1} = Y_n + 1$

$X_n/(X_n + Y_n)$

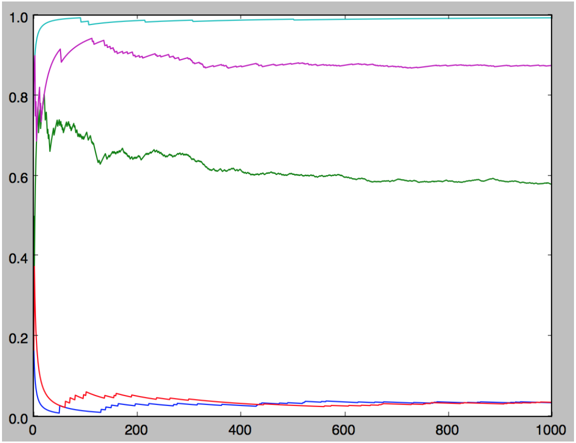


Exemple : urnes de Polya (voir sujet popularité)

$X_1 = 1,\ Y_1 = 1.$

- Avec probabilité $X_n/(X_n + Y_n)$: $X_{n+1} = X_n + 1$
- Avec probabilité $Y_n/(X_n + Y_n)$: $Y_{n+1} = Y_n + 1$

$X_n/(X_n + Y_n)$

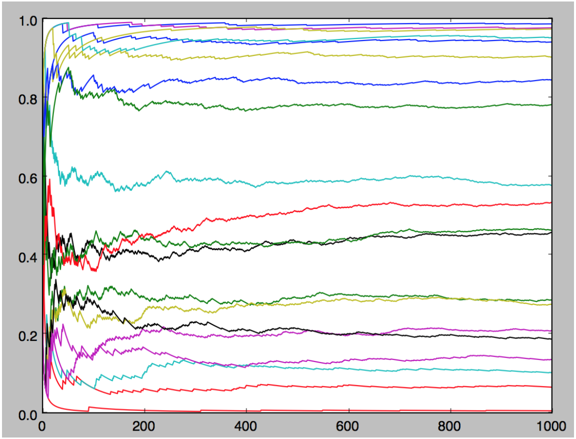


Exemple : urnes de Polya (voir sujet popularité)

$X_1 = 1,\ Y_1 = 1.$

- Avec probabilité $X_n/(X_n + Y_n)$: $X_{n+1} = X_n + 1$
- Avec probabilité $Y_n/(X_n + Y_n)$: $Y_{n+1} = Y_n + 1$

$X_n/(X_n + Y_n)$



Modèle de réseaux (voir sujet "page rank")

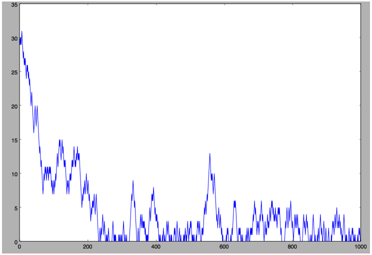
$X_{n+1} = \max(X_n + Y_n, 0) \quad \mathbb{P}(Y = 1) = p,\ \mathbb{P}(Y = -1) = 1 - p.$

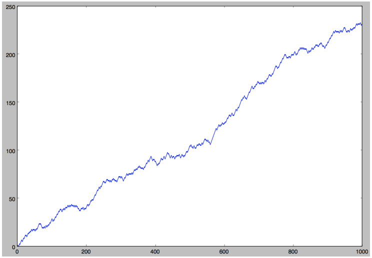
Modèle de réseaux (voir sujet “page rank”)

$X_{n+1} = \max(X_n + Y_n, 0) \quad \mathbb{P}(Y = 1) = p,\ \mathbb{P}(Y = -1) = 1 - p.$

$p = 0.4$ $\qquad$ $p = 0.6$

1 traj



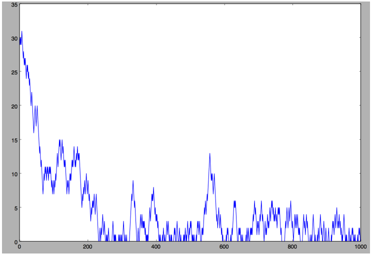


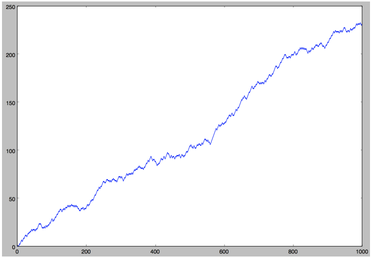
Modèle de réseaux (voir sujet “page rank”)

$$X_{n+1} = \max(X_n + Y_n, 0) \qquad \mathbb{P}(Y = 1) = p,\ \mathbb{P}(Y = -1) = 1 - p.$$

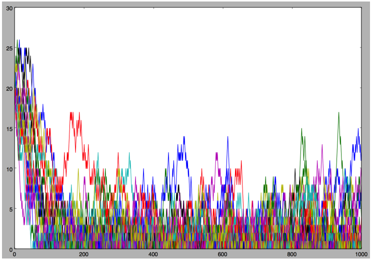
$p = 0.4$ | $p = 0.6$

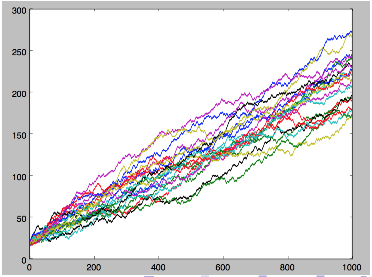
1 traj





20 traj





Quiz

$\mathbb{P}(X_n = 1) = 1 - \mathbb{P}(X_n = 0) = \frac{1}{2}$.

Deux propositions :

1. X_n converge ?
2. $\frac{1}{n} \sum X_n$ converge ?

(A) 1 est vraie, 2 est fausse

(B) 2 est vraie, 1 est fausse

(C) 1 et 2 sont vraies

(D) 1 et 2 sont fausses

(E) Je ne sais pas.

Quiz (2)

$\mathbb{P}(X_n = 1) = 1 - \mathbb{P}(X_n = 0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}$.
Deux propositions :

1. X_n converge ?
2. $\frac{1}{n} \sum X_n$ converge ?

(A) 1 est vraie, 2 est fausse

(B) 2 est vraie, 1 est fausse

(C) 1 et 2 sont vraies

(D) 1 et 2 sont fausses

(E) Je ne sais pas.

Quiz (3)

$\mathbb{P}(Z=1)=\mathbb{P}(Z=0)=\frac{1}{2}$.

- $X_n = \begin{cases} Z & \text{si } n=1 \\ 1-X_{n-1} & \text{sinon} \end{cases}$

(A) X converge

(B) X ne converge pas

(C) Je ne sais pas.

Solution : il existe plusieurs notions de convergence

Solution : il existe plusieurs notions de convergence

Quiz

Que veut dire "A est vrai presque sûrement" :

(A) A est toujours vrai

(B) $\mathbb{P}(A) \approx 1$ (A est vrai avec grande probabilité)

(C) $\mathbb{P}(A) = 1$

Convergence presque sûre (et en probabilité)

(au tableau)

Exercice / Quiz : Ruine d'un joueur

On joue à pile ou face. Si au coup n, un joueur mise y, il gagne y avec probabilité $1/2$ et perd y avec probabilité $1/2$.
La fortune initiale est $X_0 = 0$ et la mise initiale est $y_0 = 1$.

- Il double la mise tant qu'il n'a pas gagné.

On note X_n sa fortune au temps n.

(A) X_n converge vers 0 presque sûrement.

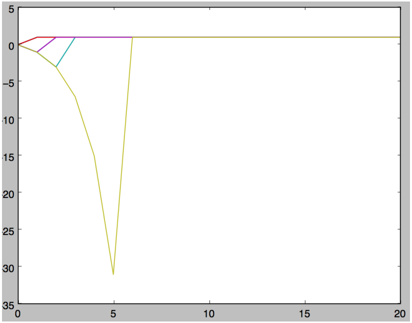
(B) X_n converge vers 1 presque sûrement.

(C) X_n ne converge pas.

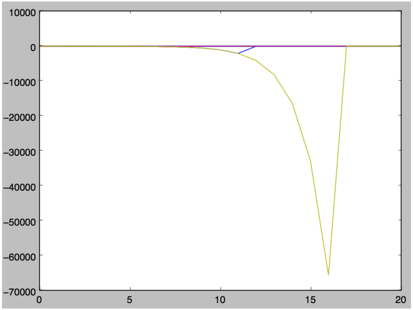
(D) Je ne sais pas.

Ruine : simulation

Proba(gagner)=.5



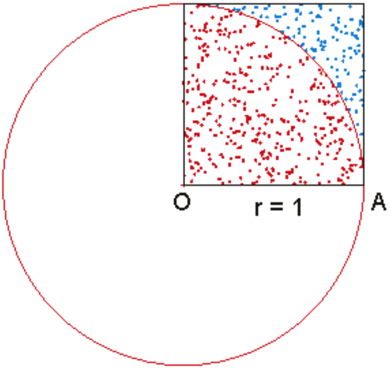
Proba(gagner=.1)



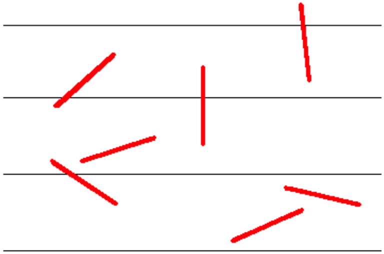
Loi faible / forte des grands nombres

(au tableau)

Application : calcul de π



Application : calcul de π



Exercice (TD puis TP) : processus de branchement

Y_i^n est une suite de variables *i.i.d.*
La population X_n est définie par :

$$X_0 = 1$$
$$X_{n+1} = \sum_{i=1}^{X_n} Y_i^n.$$

Exercice :

1. Calculer $\mathbb{E}(X_n)$ en fonction de $\mathbb{E}(Y)$
2. En déduire que :
   - si $\mathbb{E}(Y_n) < 1$, alors la population s'éteint presque sûrement.
   - si $\mathbb{E}(Y_n) > 1$, alors la population converge vers l'infini avec probabilité positive.

Quiz : vrai/faux

$\mathbb{P}(Z = 1) = \mathbb{P}(Z = 0) = \frac{1}{2}$.

- $X_n = \begin{cases} Z & \text{si } n = 1 \\ 1 - X_{n-1} & \text{sinon} \end{cases}$

(A) X_n converge presque sûrmement ou en probabilité.

(B) X_n ne converge pas (presque sûrmement ou en probabilité).

Quiz : vrai/faux

$\mathbb{P}(Y_n = 1) = \mathbb{P}(Y_n = 0) = \frac{1}{2}$.

- $X_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} Y_k$

(A) X_n converge presque sûrmement ou en probabilité.

(B) X_n ne converge pas (presque sûrmement ou en probabilité).

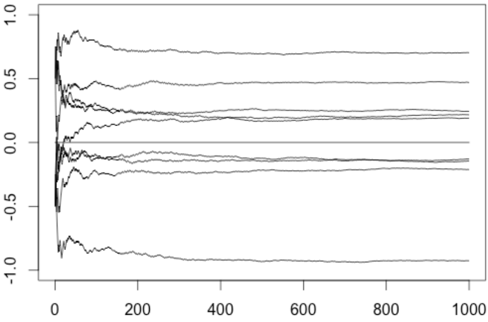
Quiz : vrai/faux

$\mathbb{P}(Y_n = 1) = \mathbb{P}(Y_n = 0) = \frac{1}{2}$.

- $X_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} Y_k$

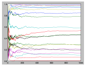
(A) X_n converge presque sûrmement ou en probabilité.

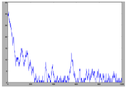
(B) X_n ne converge pas (presque sûrmement ou en probabilité).



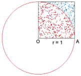
Résumé de l'épisode

Deux types de convergence.





Convergence presque sûre
Loi des grands nombre



Convergence presque sûre

- Définition et exemples
- Loi des grands nombres
- Modèles de population
- Résumé de l'épisode (précédent)

Convergence en loi

- Définition et exemples
- Théorème central limite et intervalles de confiance

A retenir

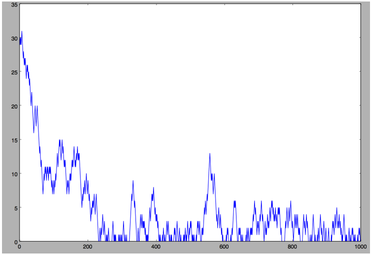
Plan du cours

Modèle de réseaux : rappel

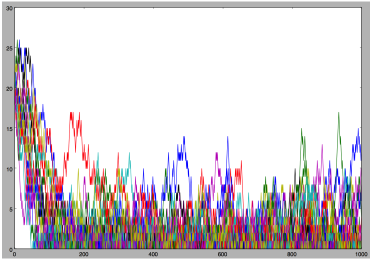
$$X_{n+1} = \max(X_n + Y_n, 0) \qquad \mathbb{P}(Y = 1) = p,\ \mathbb{P}(Y = -1) = 1 - p.$$

$p = 0.4$

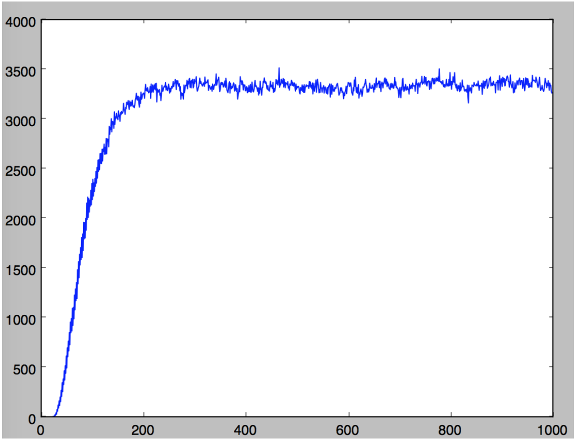
1 traj



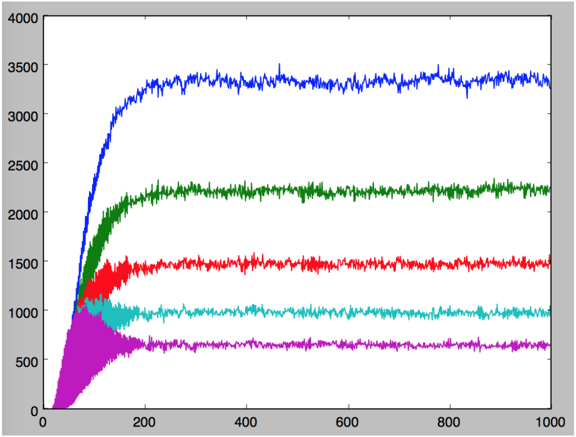
20 traj



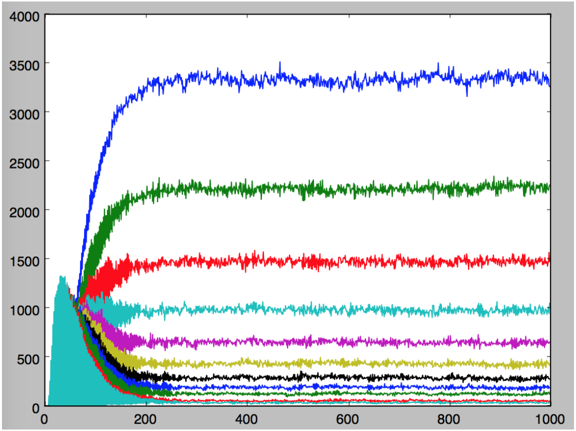
Modèle de réseaux : fréquences empiriques d'apparition



Modèle de réseaux : fréquences empiriques d'apparition



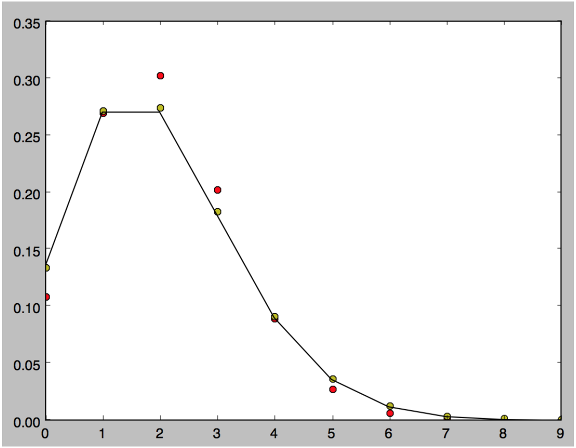
Modèle de réseaux : fréquences empiriques d'apparition



Convergence en loi, exemple de la loi de Poisson

(au tableau)

Convergence de la loi binomiale



Exercice : Poisson

Soit $X \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$ et $Y \sim \mathrm{Poisson}(\mu)$ deux variables indépendantes.

$X + Y$ est :

(A) une loi de Poisson de paramètre $\lambda\mu$;

(B) une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$;

(C) une loi de déterministe de paramètre $\lambda\mu$;

(D) je ne sais pas.

Confiance ?

On dispose d'une pièce biaisée $\mathbb{P}(X_i = 1) = 1 - \mathbb{P}(X_i = 0) = p$.

- On cherche à estimer p.

On effectue des tirage : 0,

Confiance ?

On dispose d'une pièce biaisée $\mathbb{P}(X_i = 1) = 1 - \mathbb{P}(X_i = 0) = p$.

- On cherche à estimer p.

On effectue des tirage : 0, 1, 0, 1, 0, 1,

Confiance ?

On dispose d'une pièce biaisée $\mathbb{P}(X_i = 1) = 1 - \mathbb{P}(X_i = 0) = p$.

- On cherche à estimer p.

On effectue des tirage : 0, 1, 0, 1, 0, 1,1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0,

Confiance ?

On dispose d'une pièce biaisée $\mathbb{P}(X_i = 1) = 1 - \mathbb{P}(X_i = 0) = p$.

- On cherche à estimer p.

On effectue des tirage : 0, 1, 0, 1, 0, 1,1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0,0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1,. . .

Confiance ?

On dispose d'une pièce biaisée $\mathbb{P}(X_i = 1) = 1 - \mathbb{P}(X_i = 0) = p$.

- On cherche à estimer p.

On effectue des tirage : 0, 1, 0, 1, 0, 1,1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0,0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1,. . .

	1						
$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$	0.0						

Confiance ?

On dispose d'une pièce biaisée $\mathbb{P}(X_i = 1) = 1 - \mathbb{P}(X_i = 0) = p$.

- On cherche à estimer p.

On effectue des tirage : 0, 1, 0, 1, 0, 1,1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0,0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1,. . .

	1	3	5				
$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$	0.0	0.333. . .	.4				

Confiance ?

On dispose d'une pièce biaisée $\mathbb{P}(X_i = 1) = 1 - \mathbb{P}(X_i = 0) = p$.

- On cherche à estimer p.

On effectue des tirage : 0, 1, 0, 1, 0, 1,1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0,0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1,...

	1	3	5	10	20	100	
$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$	0.0	0.333...	.4	0.7	0.7	0.57	

Confiance ?

On dispose d'une pièce biaisée $\mathbb{P}(X_i = 1) = 1 - \mathbb{P}(X_i = 0) = p$.

- On cherche à estimer p.

On effectue des tirage : 0, 1, 0, 1, 0, 1,1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0,0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1,...

	1	3	5	10	20	100	1000
$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$	0.0	0.333...	.4	0.7	0.7	0.57	0.606

Confiance ?

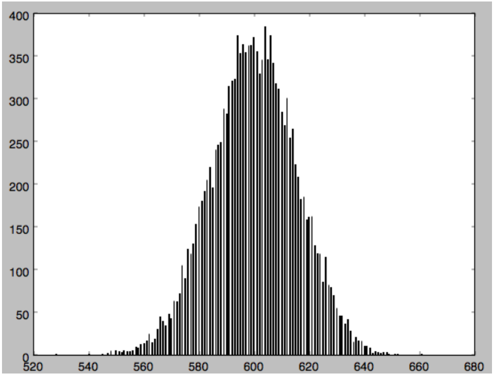
On dispose d'une pièce biaisée $\mathbb{P}(X_i = 1) = 1 - \mathbb{P}(X_i = 0) = p$.

- On cherche à estimer p.

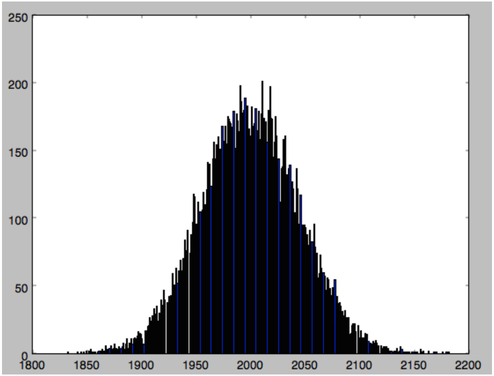
On effectue des tirage : 0, 1, 0, 1, 0, 1,1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0,0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1,. . .

	1	3	5	10	20	100	1000
$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$	0.0	0.333. . .	.4	0.7	0.7	0.57	0.606
	0.0	0.666. . .	0.8	0.7	0.65	0.71	0.62
	1.0	0.666. . .	0.6	0.4	0.55	0.6	0.597
	0.0	0.0	0.2	0.3	0.45	0.53	0.574
	0.0	0.333. . .	0.2	0.5	0.6	0.59	0.592
	0.0	0.333. . .	0.4	0.6	0.55	0.6	0.623
	1.0	0.666. . .	0.4	0.3	0.55	0.57	0.599
	1.0	0.666. . .	0.6	0.7	0.7	0.63	0.579

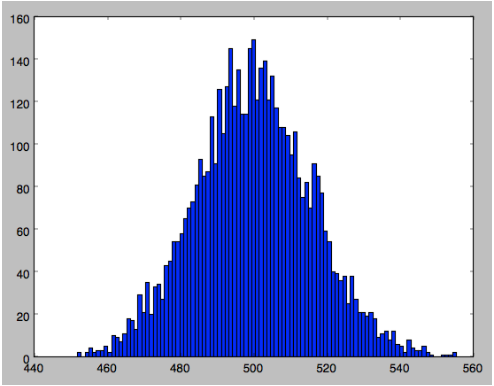
Histogramme de $\sum_{i=1}^{1000} X_i$



Avec des géométriques : $\mathbb{P}(X_i = j) = p(1-p)^j$.



Avec une exponentielle : $\mathbb{P}(X_i \leq x) = \exp(-\lambda x)$



Théorème central limite : exemple de la marche aléatoire

$\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = -1) = 0.5$. $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_n$.

- A quelle vitesse converge $\frac{1}{n} S_n$ vers 0 ?

Théorème central limite : exemple de la marche aléatoire

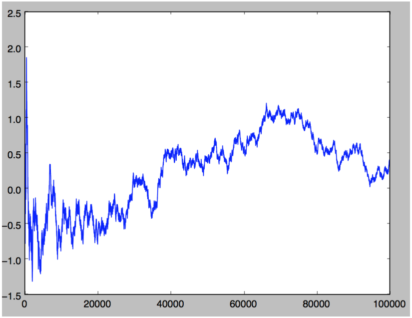
$\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = -1) = 0.5$. $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_n$.

- A quelle vitesse converge $\frac{1}{n} S_n$ vers 0 ?
- Est-ce que $\frac{1}{\sqrt{n}} S_n$ converge ?

Théorème central limite : exemple de la marche aléatoire

$\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = -1) = 0.5$. $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_n$.

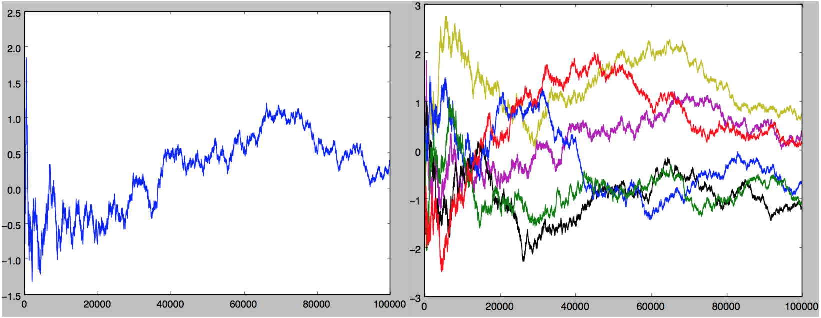
- A quelle vitesse converge $\frac{1}{n} S_n$ vers 0 ?
- Est-ce que $\frac{1}{\sqrt{n}} S_n$ converge ?



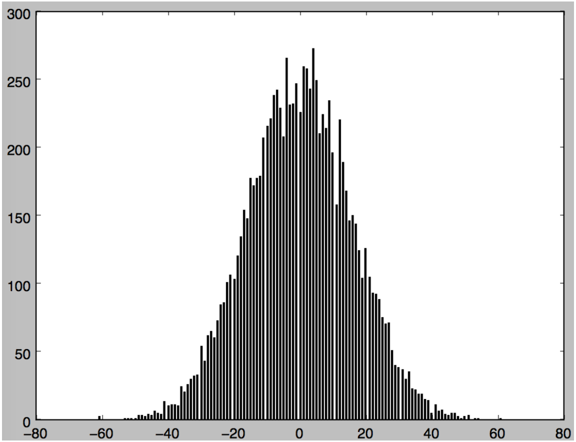
Théorème central limite : exemple de la marche aléatoire

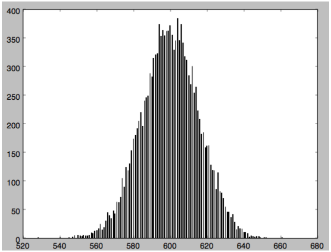
$\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = -1) = 0.5$. $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_n$.

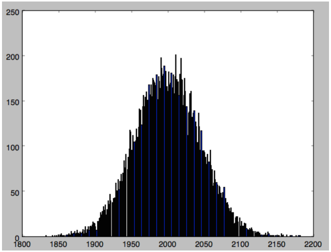
- A quelle vitesse converge $\frac{1}{n} S_n$ vers 0 ?
- Est-ce que $\frac{1}{\sqrt{n}} S_n$ converge ?

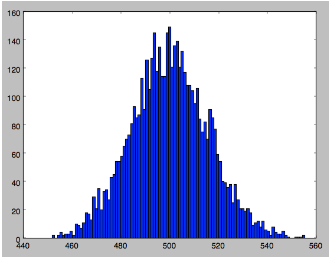


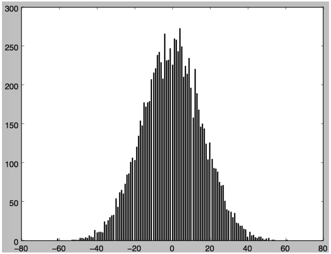
Histogramme des S_{1000} : les valeurs sont (principalement) entre -40 et 40.




0
50
100
150
200
250
300
350
400
520
540
560
580
600
620
640
660
680

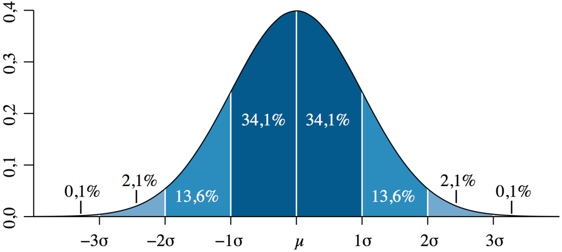

0
50
100
150
200
250
1800
1850
1900
1950
2000
2050
2100
2150
2200


0
20
40
60
80
100
120
140
160
440
460
480
500
520
540
560


0
50
100
150
200
250
300
−80
−60
−40
−20
0
20
40
60
80

Loi normale

Densité : $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \; \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$.



Théorème central limite et intervalles de confiance sur la moyenne

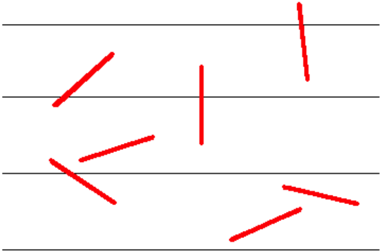
(au tableau)

Exercice : application aux sondages

Question X_k : $\mathbb{P}(X_k = 1) = 1 - \mathbb{P}(X_k = 0) = p$.
$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$

1. Calculer la variance de X_k
2. En déduire la variance de S_n/n
3. Pourquoi dit-on souvent que la marge d'erreur d'un sondage est de 3% ?

Exercice 2 : calcul de π



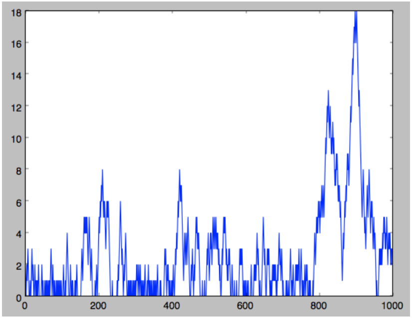
- La probabilité de tomber sur une arrête est $2/\pi \approx 0.64$.
- Combien faut-il faire d'expériences pour garantir k chiffres après la virgules ?

Attention aux hypothèses... : Moyenne : $\bar{X} \pm 2\frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{n}}$. ?

1. Indépendance.

Attention aux hypothèses... : Moyenne : $\bar{X} \pm 2\frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{n}}$. ?

1. Indépendance.



Ici : moyenne : $\bar{X} = 2.60$, variance normalisée : $\frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{n}} = 0.10$.
Vraie moyenne : 2.

Attention aux hypothèses... : Moyenne : $\bar{X} \pm 2\frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{n}}$. ?

1. Indépendance.

2. Problème de variance
   Loi de *Zipf* :

$$\mathbb{P}(X_n = i) \propto \frac{1}{i^\alpha}$$

Soit $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$.

- $(S_n - n\mu)/\sqrt{n}$

Attention aux hypothèses... : Moyenne : $\bar{X} \pm 2\frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{n}}$. ?

1. Indépendance.

2. Problème de variance

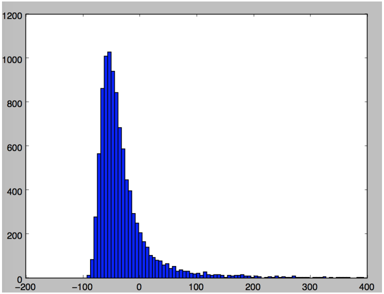
Loi de *Zipf* :

$$\mathbb{P}(X_n = i) \propto \frac{1}{i^\alpha}$$

Soit $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k$.

- $(S_n - n\mu)/\sqrt{n}$ex : $(\alpha = 1.2)$

$n = 1000$



Attention aux hypothèses... : Moyenne : $\bar{X} \pm 2\frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{n}}$. ?

1. Indépendance.

2. Problème de variance

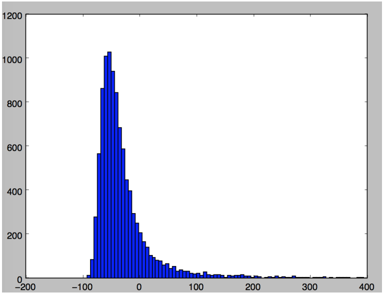
Loi de *Zipf* :

$$\mathbb{P}(X_n = i) \propto \frac{1}{i^\alpha}$$

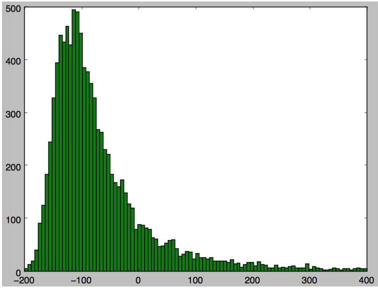
Soit $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k$.

- $(S_n - n\mu)/\sqrt{n}$ex : $(\alpha = 1.2)$

$n = 1000$



$n = 10000$

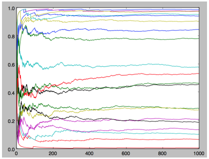


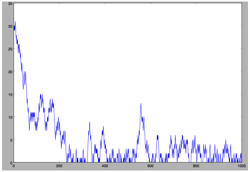
Les intervalles de confiance sur les quantiles sont plus robustes

(au tableau)

A retenir

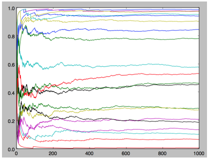
Deux types de convergence

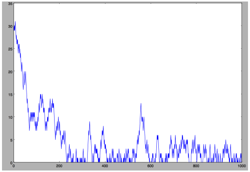




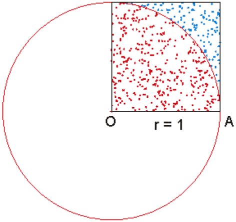
A retenir

Deux types de convergence



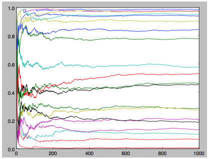


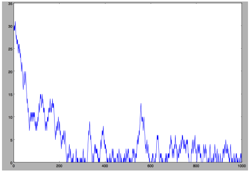
Loi des grands nombres



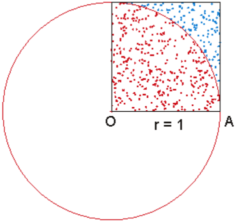
A retenir

Deux types de convergence

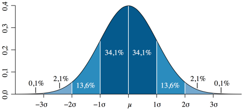




Loi des grands nombres



Théorème centrale limite
intervalles de confiance.



$$\mathbb{E}(X) = \bar{X} \pm 2\frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{n}}$$

sous hypothèses